ALGEBRA

Bruchterme 1

(1) Werte berechnen und Definitionsbereich finden

(2) Kürzen und Erweitern von Bruchtermen

Die Aufgaben dieses Textes findet man auch als reine
Aufgabensammlung mit Lösungen im Text 12112
zum Einsatz im Unterricht

Datei Nr. 12110

Friedrich W. Buckel

Stand 10. Juni 2015

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort

Dieser Text wurde überarbeitet und neu gestaltet.

Im vorliegenden 1. Teil wird an Beispielen gezeigt, welche Bedeutung Terme haben, und was man speziell bei Bruchtermen beachten muss. Es geht vor allem darum, dass man in einen Bruchterm dann keine Zahl einsetzen darf, wenn dabei der Nenner 0 wird. Durch 0 kann man nicht dividieren!

Bei der Bestimmung der Menge der erlaubten Zahlen, die man **Definitionsbereich** nennt, muss man also herausfinden, für welche Zahlen der Nenner 0 wird. Man muss also Gleichungen lösen, die bei fortschreitendem Schwierigkeitsgrad für manche Altersstufen noch zu kompliziert sind. Beispielsweise, wenn man dabei eine **quadratische Gleichung** lösen muss, was man erst ab 9, frühestens ab Klassenstufe 8 lernt.

Dann gibt es jedoch alternative Methoden, nämliche das Zerlegen des Nenners in ein Produkt, genannt **Faktorisierung**.

Für den Term x^2-5x+6 sieht das Ergebnis so aus $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

Um dorthin zu gelangen, muss man diese etwas komplizierte Art des Faktorisierens gelernt haben, was im Text 12104 gezeigt wird.

Hier also muss jeder selbst seine Ziele festlegen und da aufhören, wo es für ihn bzw. sie zu viel wird. Dies bedeutet für den Leser: Erkenne selbst, welche Anforderungen deine Schule an dich stellt. Weiter sollte ein Schüler, der hier Hilfe sucht, weil er ganz schlechte Noten schreibt, auch so überlegen: Für eine befriedigende Note muss man nicht alles können bzw. wissen. Dann sollte man eher die einfacheren Aufgaben so lange üben, bis man dort sicher ist, und man lässt dann die schwereren eher weg.

Ein weiterer zu beachtender Punkt ist die zugrunde gelegte Zahlenmenge.

Schüler der Klassen 7 und 8 kennen in der Regel nur die rationalen Zahlen, also die Zahlen, die man als Bruch darstellen kann. Das Zeichen dafür ist $\mathbb{Q}$. Schüler der Klassen 8 und höher lernen dann schon, dass es die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen gibt, zu denen dann die Wurzelzahlen gehören.

Ich verwende hier $\mathbb{Q}$ als Grundmenge, was man aber jederzeit durch $\mathbb{R}$ ersetzen kann.

Die Texte zum Thema Bruchterme sind:

12110	Bruchterme 1	(Definitionsbereich, Kürzen, Erweitern)
12111	Bruchterme 2	(Addition, Subtraktion)
12112	Bruchterme 3	Trainingsaufgaben aus diesen zwei Dateien

12145	Bruchgleichungen 1	(ohne quadratische Gleichungen)
12146	Bruchgleichungen 3	(mit Paramatern)
12240	Bruchgleichungen 2	(die auf quadratische Gleichungen führen)

Inhalt

Diese Texte zu Termen gibt es in der Mathematik-CD

12101	Äquivalente Terme: Klammern multiplizieren
12101A	Aufgabenblätter zu 12101
12102:	Binomische Formeln
12103:	Faktorisieren und Quadratische Ergänzung
12104:	Faktorisieren mit beliebigen Klammern
12105:	Berechnung von $(a+b)^n$ mit Pascalschem Dreieck sowie $(a+b+c)^2$
12106	Binomialkoeffizient
12107	Testaufgaben
12108	Zur Wiederholung: Grundlagen kompakt
12109	Zur Wiederholung: Grundlagentest (Was weiß ich noch?)
12110	Bruchterme: Definitionsbereich, kürzen und erweitern
12111	Bruchterme: Add., Subtr., Mult. und Division von Bruchtermen
12112	Aufgabensammlung aus 12110 und 12111
12116:	Polynomdivision

1. Mit Bruchtermen Zahlen berechnen

Terme sind Ausdrücke, die Zahlen, Variable und Rechenzeichen enthalten.

Beispiele: $(12+7)\cdot 3$, $x+2$, $4x-7$, $(x+3)^2$, $\frac{x+y}{2}$, $(x+2)(x-2)$ usw.

Wenn im Nenner eine Variable steht, spricht man von einem **Bruchterm**:

$\frac{4}{x}$, $\frac{x+1}{x-2}$, $\frac{12-x}{x^2}$, $\frac{4x}{x^2+16}$, $4+\frac{3}{u}$, $\frac{x}{y-1}+\frac{2y}{x+1}$, usw.

Wenn ein Term Variable enthält, kann man für sie Zahlen einsetzen und so neue Zahlen (Werte) berechnen.

Beispiele:

Zuerst der Term: $\frac{4}{x}$

Zahl für x	Berechneter Wert
1	$\frac{4}{1}=4$
2	$\frac{4}{2}=2$
3	$\frac{4}{3}$
-1	$\frac{4}{-1}=-4$
0	$\cancel{\frac{4}{0}}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$

Dann der Term: $\frac{x+2}{x-5}$

Zahl für x	Berechneter Wert
-2	$\frac{-2+2}{-2-5}=\frac{0}{-7}=0$
3	$\frac{3+2}{3-5}=\frac{5}{-2}=-\frac{5}{2}$
5	$\cancel{\frac{5+2}{5-5}=\frac{7}{0}}$
6	$\frac{6+2}{6-5}=\frac{8}{1}=8$
1000	$\frac{1002}{995}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{\frac{3}{2}+2}{\frac{3}{2}-5}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{10}{2}}=\frac{\frac{7}{2}}{-\frac{7}{2}}=-1$

Man erkennt, dass man durch Einsetzen einer Zahl für x einen Wert berechnen kann (2. Spalte). Die einzusetzenden Zahlen können positiv, negativ, Bruchzahlen usw. sein.

Dies klappt aber nicht immer. Wenn durch Einsetzen im Nenner die Zahl 0 entsteht, dann müsste man durch 0 dividieren. Dies ist bekanntlich nicht möglich.

Daher kann man mit dem Term $\frac{4}{x}$ der Zahl 0 keinen Wert zuordnen, weil sonst durch 0 teilen müsste.

Und aus dem gleichen Grund kann man mit demTerm $\frac{x+2}{x-5}$ der Zahl 5 keinen Wert zuordnen.

Wichtige Erkenntnis. Man sollte bei einem Bruchterm möglichst zuerst überprüfen, welches diese „verbotenen" Zahlen sind!

Zu jedem Term gehört eine Menge von Zahlen, genannt *Definitionsbereich*. Das sind die Zahlen, die man für die Variable einsetzen kann, und denen man dann einen Wert zuordnen kann.

2 Definitionsbereich bestimmen

Methode zur Bestimmung des Definitionsbereichs einer Bruchgleichung:

Man fragt: **Für welche Zahl wird ein in der Bruchgleichung vorkommender Nenner 0**?
Diese Zahl nennt man die **Nullstelle des Nenners**.
Sie ist die Lösung der Gleichung **Nenner = 0**.

Die gefundenen Lösungszahlen sind dann „verbotene" Zahlen, was bedeuten soll, dass man sie nicht einsetzen darf, weil man sonst durch 0 dividieren müsste.

Der Definitionsbereich der Gleichung besteht aus der Grundmenge aller Zahlen ohne die Nullstellen aller Nenner

Die **Grundmenge aller Zahlen** hängt vom Kenntnisstand des Lesers ab.

Für Schüler der Klassen 6 bis 8 ist die Grundmenge die Menge $\mathbb{Q}$ aller **rationalen Zahlen** (das sind alle Zahlen, die man als Bruchzahl darstellen kann).

Ab Klasse 8 oder 9 ist die Grundmenge die Menge $\mathbb{R}$ aller **reellen Zahlen**. Sie enthalten dann auch Zahlen wie $\sqrt{2}, \pi$ usw., die man nicht als Bruchzahl darstellen kann.

Die Methode zur Bestimmung des Definitionsbereichs von Bruchtermen besteht also einfach darin, die Nullstellen der vorkommenden Nennerterme zu berechnen, also Gleichungen zu lösen.

Hier zeigt sich die Problematik: Man muss Gleichungen lösen können!
Diese Gleichungen können ganz einfach sein, aber auch so komplizieret, dass man sie eventuell noch nicht lösen kann, weil man die Lösungsmethode noch nicht kennt.

Ich bespreche jetzt verschiedene Fälle, die zu unterschiedlichen Gleichungstypen führen.

1. Fall:	Lineare Terme im Nenner (d.h. ohne x^2 usw.)	z. B:	$2x+4=0$
2. Fall:	Produkte aus linearen Termen	z. B.	$(x+3)(2x-1)=0$
3. Fall:	Quadratische Nennerterme ohne Absolutglied	z. B.:	$x^2+5x=0$
4. Fall:	Nennerterme der Form $a \cdot x^2 - b$	z. B.	$2x^2-18=0$
5. Fall	Nennerterme der Form ax^2+bx+c	z. B.	$x^2+6x+9=0$

Dabei müssen wir unterscheiden, ob der Schüler diese mit der Faktorisierungs-Methode löst, oder ob er schon gelernt hat, quadratische Gleichungen mit einer Lösungsformel zu lösen.

Da dieser Text für alle gelten soll, muss eben der Löser herausfinden, welchen Abschnitt er durcharbeiten muss.

1. Fall: Lineare Terme im Nenner (ohne x^2)

a) $\frac{4}{x-2}$ b) $\frac{5x-2}{3}$ c) $\frac{2}{5x}+3$ d) $\frac{3}{x+3}+\frac{2}{x-3}$ e) $\frac{2x+5}{3x-1}-\frac{x-2}{2x+1}$

Bestimmung der Definitionsbereiche:

a) $\frac{4}{x-2}$

Der Nenner heißt $x-2$. Wann wird dieser Nenner = 0?

$x-2=0$ ergibt $x=2$. **Also ist 2 die verbotene Zahl.**

Definitionsbereich: $\mathbf{D}=\mathbb{Q}\setminus\{2\}$ oder $\mathbf{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Man kann also zu allen Zahlen außer der 2 einen Wert berechnen.

Hinweis: Den Definitionsbereich schreibt man so auf, dass man die verbotenen Zahlen aus der Grundmenge der dem Schüler bekannten Zahlen herausnimmt.
Die Menge aller bekannten Zahlen ist bis Klasse 7 oder 8 die Menge $\mathbb{Q}$ aller Bruchzahlen oder **rationalen Zahlen**, ab Klasse 8 ist es die Menge $\mathbb{R}$ aller **reellen Zahlen**. Ich verwende in der Regel $\mathbb{Q}$, was jeder für sich ändern kann.

b) $\frac{5x-2}{3}$

Hier steht im Nenner kein x, also ist der Nenner immer konstant 3.
Es wird hier also nie passieren, dass man durch 0 dividiert, egal, was man für x im Zähler einsetzt. Der Definitionsbereich besteht also aus allen verfügbaren Zahlen: $\mathbf{D}=\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbf{D}=\mathbb{R}$ (je nach Klassenstufe).

c) $\frac{2}{5x}+3$

Wann wird der Nenner 0? $5x=0$ bedeutet x = 0

0 ist also für den Definitionsbereich auszuschließen: $\mathbf{D}=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$

d) $\frac{3}{x+3}+\frac{2}{x-3}$

1. Nenner = 0: $x+3=0$ also $x=-3$
2. Nenner = 0: $x-3=0$ also $x=3$

–3 und 3 sind also für den Definitionsbereich auszuschließen: $\mathbf{D}=\mathbb{Q}\setminus\{\pm3\}$

e) $\frac{2x+5}{3x-1}-\frac{x-2}{2x+1}$

1. Nenner = 0: $3x-1=0$, also $3x=1$ bzw. $x=\frac{1}{3}$
2. Nenner = 0: $2x+1=0$, also $2x=-1$ bzw. $x=-\frac{1}{2}$

$\mathbf{D}=\mathbb{Q}\setminus\left\{\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right\}$

Aufgabe 1

a) $\frac{4x}{2-x}$ b) $\frac{x^2}{3x+7}$ c) $\frac{5x-2}{8x}$ d) $\frac{3+x}{2x-10}$

e) $\frac{x}{13x-39}$ f) $\frac{2x}{8-x}$ g) $\frac{4x+5}{-2}$ h) $\frac{3x+7}{1-9x}$

i) $\frac{15}{4x}+\frac{12}{x+12}$ j) $\frac{x+2}{2-x}-\frac{x^2}{3x+12}$ k) $\frac{5x+2}{8x-12}+\frac{2}{6x-9}$

2. Fall: Produkte im Nenner

a) $\frac{5x+1}{(x-3)x}$ b) $\frac{16}{(x+2)(x-2)}$ c) $\frac{16}{(x-4)^2}$ d) $\frac{x^2}{(2x+4)(3x-9)}$

WISSEN über Nullprodukte

Eine Gleichung der Form $(x-3)\cdot x=0$ nennt man ein **Nullprodukt**.

Ein Produkt wird genau dann 0, wenn einer der Faktoren Null wird.

Hierzu gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Faktor $(x-3)$ $x-3=0$ ergibt die 1. Lösung: $x_1=3$
2. Faktor x: $x=0$ ergibt die 2. Lösung: $x_2=0$

Die Nullprodukt-Gleichung hat also die Lösungen 3 und 0.

Bestimmung der Definitionsbereiche

a) $\frac{5x+1}{(x-3)x}$

Der Nenner ist das Produkt $(x-3)\cdot x$.
Dieses wird Null, wenn einer der beiden Faktoren 0 wird,
also für x = 3 oder für x = 0. $\mathbf{D}=\mathbb{Q}\setminus\{3;0\}$

b) $\frac{16}{(x+2)(x-2)}$

Setzt man den Nenner 0, folgt das Nullprodukt: $(x+2)(x-2)=0$
Dieses wird Null, wenn einer der beiden Faktoren Null wird:
Also für x = -2 oder für x = 2.
Für den Definitionsbereich folgt daher: $\mathbf{D}=\mathbb{Q}\setminus\{\pm2\}$.

c) $\frac{16}{(x-4)^2}$

Der Nenner ist in Wirklichkeit das Produkt $(x-4)(x-4)$.
Dieses wird 0, wenn $x-4=0$ wird, also für x = 4. $\mathbf{D}=\mathbb{Q}\setminus\{4\}$

d) $\frac{x^2}{(2x+4)(3x-9)}$

Nenner = 0, ergibt das Nullprodukt: $(2x+4)(3x-9)=0$

Dieses wird Null, wenn einer der beiden Klammern Null wird:

$2x+4=0$ führt zu x = -2 und $3x-9=0$ führt zu x = 3.

Für den Definitionsbereich folgt daher: $\mathbf{D}=\mathbb{Q}\setminus\{-2;3\}$.

Aufgabe 2

a) $\frac{2x+3}{x(x-1)}$ b) $\frac{x^2+4}{(x-2)(x+3)}$ c) $\frac{x+2}{x(x+1)(x-1)}$ d) $\frac{x^2+x+1}{(3x+7)(3x-7)}$

e) $\frac{2x+4}{(x+5)(x+2)}$ f) $\frac{x^2-4}{(2x+5)(3x-12)}$ g) $\frac{x+3}{x^2+12x}$ h) $\frac{5}{x^2-4x}$